VIDEOLEZIONE

- ESERCIZI CARDINALITÀ
- RELAZIONI DI EQUIVALENZA
- RELAZIONI D'ORDINE
- ESERCIZI SULLE RELAZIONI

ES.: DATI $3\mathbb{N}$, $4\mathbb{N}$ E $5\mathbb{N}$, DIMOSTRARE CHE L'UNIONE È NUMERABILE.

CHE DIRE DI $3\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} \cup \{\pi\}$?

SOL.: $|\mathbb{N}| = |3\mathbb{N}|$ BIIEZIONE $f: n \mapsto 3n$

$$3\mathbb{N} \subset 3\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{N}| = |3\mathbb{N}| \leq |3\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$

$\Longrightarrow$ C.S.B. $|\mathbb{N}| = |3\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N}|$.

$3\mathbb{N} \cup 4\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} \cup \{\pi\}$ È NUMERABILE!

BASTA ESIBIRE UNA BIIEZIONE TRA

$$g: \mathbb{N} \cup \{\pi\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$g(\pi) = 0$$
$$g(n) = n+1 \quad \text{PER } n \in \mathbb{N}$$

ES.: È VERO CHE L'UNIONE DEGLI INSIEMI

$$\sqrt{2}\,\mathbb{N} = \{ n\sqrt{2} : n \in \mathbb{N} \} \quad \text{E} \quad \mathbb{Q} \quad \text{È}$$

NUMERABILE? MOTIVARE LA RISPOSTA.

SOL.: $$|\mathbb{N}| = |\sqrt{2}\,\mathbb{N}|$$

$$f : n \longmapsto \sqrt{2}\,n \qquad \text{BIIEZIONE}$$

ESISTE UNA BIIEZIONE $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$h : \sqrt{2}\,\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$h(q) = 2g(q) \quad \text{PER} \quad q \in \mathbb{Q}$$

$$h(\sqrt{2}\,n) = 2n \,[\text{illegible}]\, 1 \quad \text{SE} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

COMPITO: DATI GLI INSIEMI

$$A = 3\mathbb{N} \cup \{-3, -1\}$$

$$B = 5\mathbb{N}$$ E POSTO

$$X = A \cup B$$ DIMOSTRARE CHE X

È NUMERABILE.

RELAZIONI D'EQUIVALENZA E D'ORDINE

DEFINIZIONI: SIA $R \subset X \times X$ UNA RELAZIONE SU UN INSIEME X.

(i) R SI DICE RIFLESSIVA SE PER OGNI $x \in X$, $(x,x) \in R$

(ii) R SI DICE SIMMETRICA SE PER OGNI $x,y \in X$ T.C. $(x,y) \in R$ VALE ANCHE $(y,x) \in R$.

(iii) R SI DICE TRANSITIVA SE PER OGNI $x,y,z \in X$ CON $(x,y) \in R$ E $(y,z) \in R$ SI HA ANCHE $(x,z) \in R$.

(iv) UNA RELAZIONE $R \subset X \times X$ CHE SIA RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA SI DICE RELAZIONE DI EQUIVALENZA.

ESEMPI:

1. RELAZIONE DI UGUAGLIANZA

$$R = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$$

2. UGUAGLIANZA MODULO n: SIA n UN FISSATO NUMERO NATURALE > 0. DEFINIAMO

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \text{LE DIVISIONI CON RESTO DI } x \text{ E } y \text{ PER } n \text{ DANNO LO STESSO RESTO}\}$$

RICORDO CHE SE $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ ESISTONO UNICI $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n-1$ TALI CHE $m = qn + r$

3. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 2k\pi \text{ CON } k \in \mathbb{Z}\}$.

3. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

TRANSITIVA: $(x,y) \in R \quad (y,z) \in R$

$$x - y = 2\pi k_1 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$
$$y - z = 2\pi k_2$$
$$\overline{x - z = 2\pi(k_1 + k_2)}$$

$(x,z) \in R$

4. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$

RIFLESSIVA $\checkmark$

SIMMETRICA $\checkmark$

TRANSITIVA $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$

$$x - y = q_1 \in \mathbb{Q}$$
$$y - z = q_2 \in \mathbb{Q}$$
$$\overline{x - z = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}} \Longrightarrow (x,z) \in R$$

__OSS.:__ "AVERE LA STESSA CARDINALITÀ" È RELAZIONE SULLA __CLASSE PROPRIA__ DEGLI INSIEMI.

__DEFINIZIONI:__ SIA $R \subset X \times X$ CON X INSIEME

(V) R SI DICE __ANTIRIFLESSIVA__ SE PER OGNI $x \in X$ VALE $(x,x) \notin R$

(VI) R SI DICE __ANTISIMMETRICA__ SE PER OGNI $x, y \in X$ $(x,y) \in R$ E $(y,x) \in R$ VALE CHE $x = y$.

(VII) R SI DICE __D'ORDINE STRETTO__ SE È __ANTIRIFLESSIVA__ E __TRANSITIVA__. IN TAL CASO PER INDICARE CHE $(x,y) \in R$ SI USA LA NOTAZIONE $x \prec y$.

(VIII) R SI DICE __D'ORDINE LARGO__ SE È __RIFLESSIVA__, __ANTISIMMETRICA__ E TRANSITIVA. IN TAL CASO PER DIRE CHE $(x,y) \in R$ SI USA LA NOTAZIONE $x \preceq y$.

ESEMPI:

1. $R = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y \}$ E' D'ORDINE STRETTO.

2. SIA X UN INSIEME FISSATO

$$R = \{ (A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subsetneq B \}$$

E' D'ORDINE STRETTO (RELAZIONE DI INCLUSIONE).

3. $R = \{ (m,n) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \mid m \text{ DIVIDE } n,\ m \neq n \}$

E' D'ORDINE STRETTO (RELAZIONE DI STRETTA DIVISIBILITÀ)

- ANTIRIFLESSIVA
- TRANSITIVA: SE m DIVIDE n E n DIVIDE r

ALLORA m DIVIDE r

$n = k m \quad k \in \mathbb{N}_{>0}$

$r = h n \quad h \in \mathbb{N}$

$r = (hk) m \quad m$ DIVDE r E $(m,r) \in R$

4. $R = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y \}$

D'ORDINE LARGO

5. SIA X UN INSIEME FISSATO

$$R = \{ (A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B \}$$

D'ORDINE LARGO (INCLUSIONE)

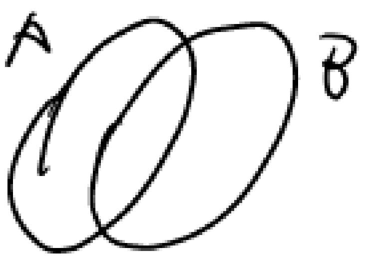
- RIFL.
- ANTISIMMETRICA $A \subseteq B$ E $B \subseteq A$ $\Longrightarrow$ $A = B$
- TRANSITIVA $A \subseteq B$ $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

6. $R = \{ (m,n) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \mid m \text{ DIVIDE } n \}$

D'ORDINE LARGO (DIVISIBILITA')

<u>DEF</u>: UNA RELAZIONE D'ORDINE LARGO R SU X SI DICE <u>TOTALE</u> SE PER OGNI $x, y \in X$ SI HA $(x,y) \in R$ OPPURE $(y,x) \in R$ (CIOÈ $x \precsim y$ OPPURE $y \precsim x$)

ES. 4 È <u>TOTALE</u>, 5 E 6 NON LO SONO.



ESERCIZI:

1. SI CONSIDERI

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m^2 - n^2 \text{ È DIVISIBILE PER } 5\}$$

DI TIPO NOTO?

SI TROVINO TUTTI I $\beta \in \mathbb{Z}$ T.C. $(\beta, 3) \in R$.

SOL.: È SIMMETRICA E RIFLESSIVA.

È TRANSITIVA: SE $(m,n) \in R$ E $(n,r) \in R$

$$m^2 - n^2 = 5k_1$$
$$n^2 - r^2 = 5k_2$$
$$m^2 - r^2 = 5(k_1 + k_2) \qquad (m,r) \in R$$

$\beta^2 - 3^2$ È DIVISIBILE PER 5

$$\beta^2 - 3^2 = (\beta - 3)(\beta + 3) \implies$$

$\beta - 3 = 5k$ OPPURE $\beta + 3 = 5h$

$$\beta = \begin{cases} 5k+3 \\ 5k-3 \end{cases} \quad \text{PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}$$

2. SI CONSIDERI

$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^6 = y^6 \text{ E } x \leq y \}$$

DIMOSTRARE CHE È D'ORDINE LARGO.

TROVARE GLI $x, y \in \mathbb{Z}$ T.C. $(x,2) \in R$ E $(y,-2) \in R$

SOL.: • RIFLESSIVA ✓

• ANTISIMMETRICA: SE $(x,y) \in R$ E $(y,x) \in R$

$$\begin{matrix} x^6 = y^6 & & y^6 = x^6 & & \\ x \leq y & & y \leq x & \Longrightarrow & x = y \end{matrix} \quad ✓$$

• TRANSITIVA: SE $(x,y) \in R$ E $(y,z) \in R$

$$\begin{matrix} x^6 = y^6 & & y^6 = z^6 & & x^6 = z^6 \\ x \leq y & & y \leq z & & x \leq z \end{matrix}$$

$\Longrightarrow (x,z) \in R$ ✓

$(x,2) \in R$ SSE $\begin{matrix} x^6 = 2^6 \\ x \leq 2 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \boxed{x = \pm 2} \\ x \leq 2 \end{matrix}$

$(y,-2) \in R$ SSE $\begin{matrix} y^6 = (-2)^6 \\ y \leq -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = \pm 2 \\ y \leq -2 \end{matrix} \quad \boxed{y = -2}$

3. SIA X L'INSIEME DEI POLIGONI DEL PIANO,

$$R = \{ (R,S) \in X \times X \mid R \text{ E } S \text{ HANNO LA STESSA AREA} \}$$

È DI TIPO NOTO?

SE T È UN TRIANGOLO EQUILATERO DI LATO 1, TROVARE I QUADRATI Q TALI CHE $(Q,T) \in R$

SOL.: R È REL.ne DI EQUIVALENZA.

T. EQUIL. LATO 1, ALTEZZA $\frac{\sqrt{3}}{2}$, AREA $= \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\boxed{Q \text{ DEVE AVERE LATO } \frac{\sqrt[4]{3}}{2}}$$

4. SI CONSIDERI LA REL.

$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x \text{ è divisibile per } 7 \text{ e } x \leq y \}$$

DIRE SE È D'ORDINE LARGO E TROVARE PER QUALI $x \in \mathbb{Z}$ SI HA $(x,6) \in R$.

SOL.:

- RIFLESSIVA ✓
- ANTISIMMETRICA? SE $(x,y) \in R$ E $(y,x) \in R$

$$x - y = 7k \qquad y - x = 7(-k)$$

$$x \leq y \qquad y \leq x$$

$$\Longrightarrow x = y \quad ✓$$

- TRANSITIVA $(x,y) \in R \quad (y,z) \in R$

$$x - y = 7k_1 \quad k_1 \in \mathbb{Z} \qquad x \leq y$$

$$y - z = 7k_2 \quad k_2 \in \mathbb{Z} \qquad y \leq z$$

$$x - z = 7(k_1 + k_2) \qquad x \leq z \Longrightarrow$$

$$(x,z) \in R$$

$$(x,6) \in R \qquad x - 6 = 7k \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \leq 6$$

$$\boxed{x = 6 + 7k, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \leq 0}$$