5.0

VIDEOLEZIONE DEL 16/3/2020

(ULTIMA LEZIONE)

- COMPLEMENTI SU RELAZ. DI EQUIVALENZA/D'ORDINE
- DIAGRAMMI DI HASSE
- ELEMENTI MASSIMALI/MINIMALI/MASSIMI/MINIMI/MAGGIORANTI/MINORANTI/ESTREMO SUPERIORE/ESTREMO INFERIORE
- ESEMPI/ESERCIZI
- ESTREMO SUPERIORE E COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ (CENNI)

<u>OSSERVAZIONE SULLE REL. D'EQUIVALENZA</u>:

SIA R UNA REL D'EQ. SU UN INSIEME X.

R <u>PARTIZIONA</u> L'INSIEME X IN <u>CLASSI DI EQUIVALENZA</u>.

<u>DEF.</u>: SIANO R, X COME SOPRA, $x \in X$.

LA <u>CLASSE DI EQUIVALENZA</u> DI x È L'INSIEME

$$[x] = \{ y \in X \mid (x,y) \in X \}$$

SI NOTI CHE PER OGNI COPPIA DI PUNTI $x, y \in X$, SOLO DUE CASI SONO POSSIBILI:

- SE $(x,y) \in R$ ALLORA $[x] = [y]$
- SE $(x,y) \notin R$ ALLORA $[x] \cap [y] = \emptyset$

<u>QUINDI X È UNIONE DI CLASSI DI EQUIVALENZA 2 A 2 DISGIUNTE</u>

(DIMOSTRARE PER ESERCIZIO LE AFFERMAZIONI FATTE SOPRA...
O LEGGETE LE DISPENSE!)

LEGAME TRA REL' D'ORDINE LARGO E STRETTO: 5.2

TEOREMA: SE R È REL. D'ORDINE LARGO SU X, ALLORA $R' = \{(x,y) \in R \mid x \neq y\}$ È D'ORDINE STRETTO.

ANALOGAMENTE, SE S È D'ORDINE STRETTO SU X, ALLORA $S' = \{(x,x) \mid x \in X\} \cup S$ È D'ORDINE LARGO.

DIM: R' È CHIARAMENTE ANTIRIFLESSIVA. DOBBIAMO MOSTRARE CHE È TRANSITIVA. SIANO INFATTI $(x,y) \in R'$, $(y,z) \in R'$.

FACCIAMO VEDERE CHE $(x,z) \in R'$.

PRIMA DI TUTTO, $(x,z) \in R$ (R È TRANSITIVA). SE PER ASSURDO FOSSE $(x,z) \notin R'$ AVREMMO $x = z$. MA ALLORA $(x,y) \in R$ E $(y,x) \in R$: PER L'ANTISIMMETRICA AVREMMO $x = y$, IMPOSSIBILE PERCHÉ $(x,y) \in R'$.

VENIAMO A S': È CHIARAMENTE RIFLESSIVA E TRANSITIVA. RESTA DA MOSTRARE L'ANTISIMMETRICA.

SIANO DUNQUE $(x,y) \in S'$, $(y,x) \in S'$: DOBBIAMO MOSTRARE CHE $x=y$. ORA, LE DUE COPPIE NON POSSONO ESSERE <u>ENTRAMBE</u> IN S, ALTRIMENTI PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA AVREMMO $(x,x) \in S$, IMPOSSIBILE PERCHÈ S È ANTIRIFLESSIVA. MA ALLORA $x=y$. Q.E.D.

<u>DIAGRAMMI DI HASSE</u>: SONO UN MODO PER RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE REL. D'ORDINE STRETTO SU INSIEMI FINITI.

<u>IDEA/"REGOLA"</u>: SE $(a,b) \in R$ (R d'ordine stretto su X)

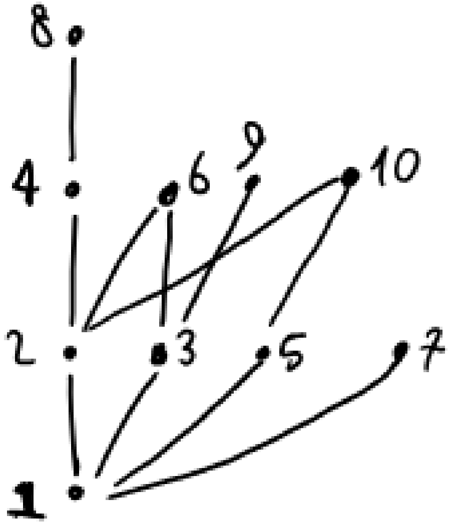
E "NON CI SONO ELEMENTI DI X TRA a E b", CIOÈ NON C'È NESSUN $c \in X$, <u>DISTINTO</u> DA a E b, T.C.

$$(a,c) \in R \text{ E } (c,b) \in R,$$

ALLORA RAPPRESENTIAMO NEL DIAGRAMMA I PUNTI a E b, CON b <u>SOPRA</u> a E CONGIUNGIAMOLI CON UN SEGMENTO. L'IDEA È METTERE I PUNTI "PIÙ GRANDI" SOPRA I "PIÙ PICCOLI" E COLLEGARLI, A <u>MENO CHE</u> IL COLLEGAMENTO NON SIA "IMPLICITO" PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA.

<u>ESEMPIO</u>: RELAZIONE DI <u>STRETTA DIVISIBILITÀ</u> SU

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



ALCUNE <u>DEFINIZIONI</u>:

SIA $<$ UNA REL. D'ORDINE STRETTA SU X, $S \subseteq X$

- $y \in X$ SI DICE <u>MAGGIORANTE</u> PER S SE PER OGNI $x \in S$ SI HA $y = x$ OPPURE $x < y$. "y È MAGGIORE O UGUALE DI OGNI EL. DI S"
  UN <u>MINORANTE</u> PER S È UN ELEMENTO $y \in X$ TALE CHE $\forall x \in S$ VALE $y = x$ OPPURE $y < x$. "y È MINORE O UGUALE DI OGNI ELEM. DI S"
- $y \in S$ SI DICE <u>MASSIMO</u> DI S SE PER OGNI $x \in S$ VALE $y = x$ OPPURE $x < y$. ANALOGAMENTE, IL <u>MINIMO</u> DI S È L'ELEMENTO $y \in S$ (SE ESISTE) TALE CHE PER OGNI $x \in S$ VALE $y = x$ OPPURE $y < x$.
- L'<u>ESTREMO SUPERIORE</u> DI S È IL <u>MINIMO DEI MAGGIORANTI</u> DI S (SE ESISTE). L'<u>ESTREMO INFERIORE</u> DI S È IL <u>MASSIMO DEI MINORANTI DI</u> S (SE ESISTE). SE UNO DI QUESTI APPARTIENE A S, NE È IL MAX (RISP. MIN)
- $y \in S$ È <u>MASSIMALE</u> SE PER OGNI $x \in S$ SI HA $y = x$, OPPURE <u>NON È VERO</u> CHE $y < x$ (x È PIÙ GRANDE DI TUTTI GLI ALTRI ELEMENTI DI S CON CUI È CONFRONTABILE).
  $y \in S$ È <u>MINIMALE</u> SE $\forall x \in S$ SI HA $y = x$ OPPURE <u>NON VALE</u> CHE $x < y$.

5.6

DICIAMOLO IN ALTRO MODO: SIA $R \subset X \times X$ LA RELAZIONE $<$. y È UN ELEMENTO MASSIMALE DI S SE PER OGNI $x \in S$ VALE $x = y$ OPPURE $(y,x) \notin R$ ($y \in S$)

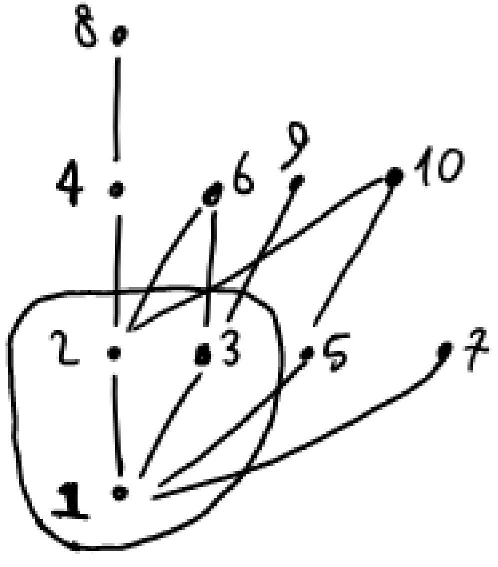
$y \in S$ È MINIMALE SE PER OGNI $x \in S$ SI HA $x = y$ OPPURE $(x,y) \notin R$.

VEDIAMO DEGLI ESEMPI A PARTIRE DALLA RELAZIONE DI STRETTA DIVISIBILITÀ SU

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

IL DIAGRAMMA DI HASSE CI AIUTERÀ A COLPO D'OCCHIO A TROVARE MAX/MIN/MAGGIORANTI/MINORANTI/SUP/INF/MASSIMALI/MINIMALI DI DIVERSI SOTTINSIEMI $S \subset X$.

5.7



$S = \{1,2,3\}$

MINIMO: 1 (ESTREMO INFERIORE)

MINORANTI: 1

MINIMALI: 1

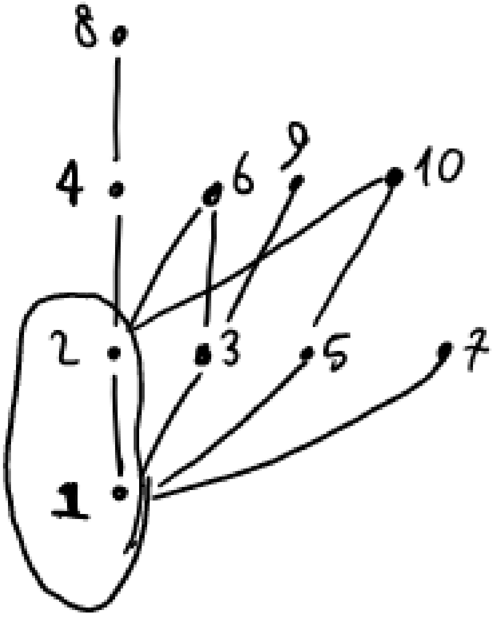
MASSIMO: —

MAGGIORANTI: 6

ESTREMO SUPERIORE: 6

MASSIMALI: 2, 3

5.8



$S = \{1, 2\}$

MINIMO: 1 (ESTREMO INFERIORE)

MINORANTI: 1

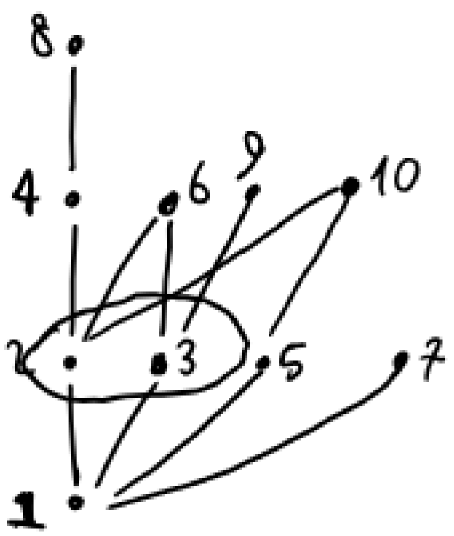
MINIMALI: 1

MASSIMO: 2 (ESTREMO SUPERIORE)

MAGGIORANTI: 2, 4, 8, 6, 10

MASSIMALI: 2

5.9



$S = \{2,3\}$

MINIMO: —

MINORANTI: 1

ESTREMO INFERIORE: 1

MINIMALI: 2, 3

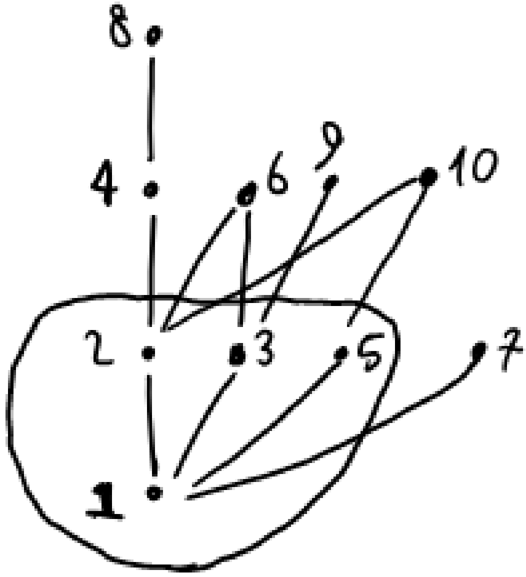
MASSIMO: —

MAGGIORANTI: 6

ESTREMO SUPERIORE: 6

MASSIMALI: 2, 3

5.10



S = {1, 2, 3, 5}

MINIMO : 1 (EST. INFERIORE)

MINORANTI : 1

MINIMALI : 1

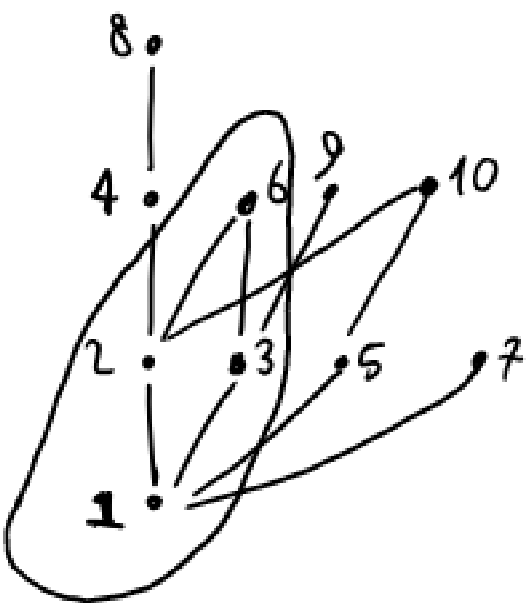
MASSIMO : —

MAGGIORANTI : —

ESTREMO SUPERIORE : —

MASSIMALI : 2, 3, 5

5.11



$S = \{1, 2, 3, 6\}$

MINIMO: 1 (ESTREMO INFERIORE)
MINORANTI: 1
MINIMALI: 1

MASSIMO: 6 (ESTREMO SUPERIORE)
MAGGIORANTI: 6
MASSIMALI: 6

OSS. FINALI:

UN INSIEME X CON UNA RELAZIONE D'ORDINE SI DICE INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO (POSET – PARTIALLY ORDERED SETS). IMPORTANTI APPLICAZIONI IN MATEMATICA E INFORMATICA (MOTORI DI RICERCA, MACHINE LEARNING ---)!

PERCHÉ "PARZIALMENTE"?

IN GENERALE, DATA UNA RELAZIONE D'ORDINE (LARGO, PER SEMPLICITÀ) E $x, y \in X$, NON È DETTO CHE SI ABBIA SEMPRE $x \preceq y$ OPPURE $y \preceq x$: I DUE ELEMENTI x E y NON SONO NECESSARIAMENTE CONFRONTABILI! (SE LO SONO SEMPRE, CIOÈ PER OGNI x e y IN X, LA REL. D'ORDINE SI DICE ORDINAMENTO TOTALE).

A COSA SERVONO ESTREMO SUPERIORE/INFERIORE?
ABBIAMO VISTO CHE NON SEMPRE CI SONO!

L'ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE È UNA DELLE PROPRIETÀ FONDANTI DEI NUMERI REALI (CHE LI DISTINGUE, PER ESEMPIO, DAI RAZIONALI):

ASSIOMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$: SIA $A \subset \mathbb{R}$ UN INSIEME NON VUOTO DI NUMERI REALI CHE ABBIA ALMENO UN MAGGIORANTE REALE (IN TAL CASO SI DICE CHE A È SUPERIORMENTE LIMITATO).
ALLORA C'È L'ESTREMO SUPERIORE DI A IN $\mathbb{R}$:
ESISTE IL MINIMO DELL'INSIEME DEI MAGGIORANTI REALI DI A.

PERCHÉ È IMPORTANTE?

GRAZIE ALL'ASSIOMA DI COMPLETEZZA È POSSIBILE DIMOSTRARE L'ESISTENZA DELLA RADICE QUADRATA, DELL'ESPONENZIALE, DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE, DEL LOGARITMO --

MAGGIORI DETTAGLI SULLE DISPENSE SE SIETE INTERESSATI!

THE END